Mathematik für Informatiker

2004-07-19 08:10

Thomas Weise

tweise@gmx.de

http://www.tu-chemnitz.de/~weist/index.htm

mit freundlicher Unterstützung von

René Kreiner (Teil 3. Semester)

Inhalt

Diese Formelsammlung war zur Vordiplomsklausur Sommersemester 2003 offiziell zugelassen. Seitdem wurden jedoch einige geringfügige Änderungen am Inhalt gemacht. Diese sind jedoch so geformt, dass sie nie Beispiele enthalten und somit nie gegen die Regelungen verstoßen. Anregungen, entdeckte Fehler, Fragen und sonstiges an meine E-Mail Adresse (siehe erste Seite).

„Jede Funktion kann man, vorausgesetzt es geht, differenzieren." (A. Meyer, 2001)

1. komplexe Zahlen

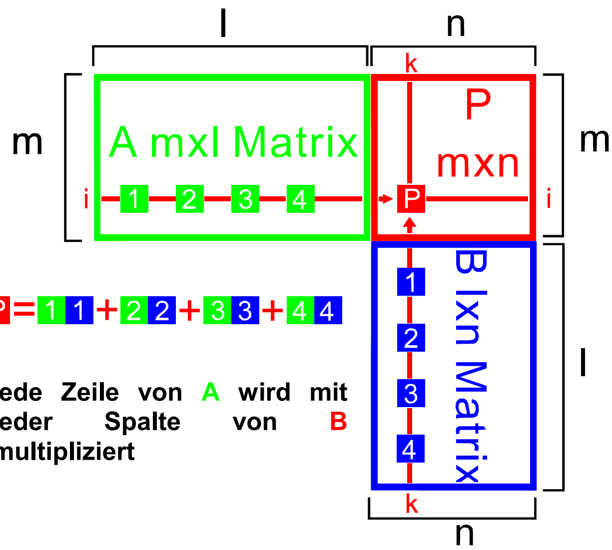
$i^2 = -1$ $\qquad \overline{a \pm b} = \overline{a} \pm \overline{b}$ $\qquad \overline{a * b} = \overline{a} * \overline{b}$ $\qquad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$

	Normalform	**trigonometrische Form**	**Exponentialform**
a	$\alpha + \beta i$	$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	$r\,e^{i\varphi}$
	$\alpha = r\cos\varphi$ $\beta = r\sin\varphi$	$r = \sqrt{\alpha^2 * \beta^2} = \lvert a \rvert$ $\tan\varphi = \frac{\beta}{\alpha},\ \varphi \in [0..2\pi) \quad \arctan\frac{\beta}{\alpha} + \text{Quadrant} = \varphi$	
$\mathrm{Re}(a)$	$\alpha = \frac{a + \overline{a}}{2}$	$r\cos\varphi$	
$\mathrm{Im}(a)$	$\beta = \frac{a - \overline{a}}{2i}$	$r\sin\varphi$	
$\lvert a \rvert$	$\sqrt{a * \overline{a}} = \sqrt{\alpha^2 * \beta^2}$	r	
$\mathrm{Arg}\ a$	$\arctan\frac{\beta}{\alpha} + \text{Quadrant}$	$\varphi \in [0..2\pi)$	
$\overline{a}$	$\alpha - \beta i$	$r(\cos -\varphi + i\sin -\varphi)$	$r\,e^{-i\varphi}$
$a \pm b$	$(\alpha_a \pm \alpha_b) + i(\beta_a \pm \beta_b)$		
$a * b$	$(\alpha_a\alpha_b - \beta_a\beta_b) + i(\alpha_a\beta_b + \beta_a\alpha_b)$	$r_a r_b\ (\cos(\varphi_a + \varphi_b) + i\sin(\varphi_a + \varphi_b))$	$r_a r_b\ e^{i(\varphi_a + \varphi_b)}$
$\frac{a}{b}$	$\frac{\alpha_a\alpha_b + \beta_a\beta_b}{\alpha_b^2 + \beta_b^2} + i\frac{\alpha_b\beta_a - \beta_b\alpha_a}{\alpha_b^2 + \beta_b^2}$	$\frac{r_a}{r_b}(\cos(\varphi_a - \varphi_b) + i\sin(\varphi_a - \varphi_b))$	$\frac{r_a}{r_b} e^{i(\varphi_b - \varphi_a)}$
a^n		$r^n\ (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$	$r^n\ e^{in\varphi}$
$\sqrt[n]{a}$		$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$	$\sqrt[n]{r}\ e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$

	$0\quad 0°$	$\frac{\pi}{6}\quad 30°$	$\frac{\pi}{4}\quad 45°$	$\frac{\pi}{3}\quad 60°$	$\frac{\pi}{2}\quad 90°$	$\frac{2\pi}{3}\quad 120°$	$\frac{3\pi}{4}\quad 135°$	$\frac{5\pi}{6}\quad 150°$	$\pi\quad 180°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\varnothing$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

2. Matrizen

$$\text{A ist } m\times n \text{ Matrix} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{ij}\,{}^{m}_{i=1}\,{}^{n}_{j=1} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \emptyset = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$P = 1\,1 + 2\,2 + 3\,3 + 4\,4$

jede Zeile von A wird mit jeder Spalte von B multipliziert

$A = a_{ij} \Leftrightarrow A^T = a_{ji} \qquad A^* = \overline{A^T}$

reelle Matrizen:

symmetrisch	$A = A^T$
schiefsymmetrisch	$A = -A^T$
orthogonal	$A^* = A^T = A^T * A = I$ $A^{-1} = A^T$

komplexe Matrizen:

Hermitesch	$A = A^*$
schief-Hermitesch	$A = -A^*$
unitär	$A * A^* = A^* * A = I$ $A^{-1} = A^*$

regulär	singulär
$\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$	$\nexists\, A^{-1} \Leftarrow \det A = 0$

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1} \qquad (AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$$

Zerlege Matrix G in Summe aus symmetrischer Matrix G^+ und schiefsymmetrischer Matrix G^-:

$$G = G^+ + G^- \qquad G^+ = \frac{G + G^T}{2} \qquad G^- = \frac{G - G^T}{2}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \overset{1}{aei} + \overset{2}{bfg} + \overset{3}{cdh} - \overset{4}{ceg} - \overset{5}{bdi} - \overset{6}{afh}$$

Determinanten

$$\begin{array}{c|ccc|} & j=1 & j=2 & j=3 \\ i=1 & a11 & a12 & a13 \\ i=2 & a21 & a22 & a23 \\ i=3 & a31 & a32 & a33 \end{array} \qquad (-1)^{i+j}$$

$$+\,a11 \begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix} - a12 \begin{vmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{vmatrix} + a13 \begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$$

$(E * C)^T = C^T * E^T$	$\underline{a}^T\underline{b} = \underline{b}^T\underline{a}$	$\frac{d}{d\underline{a}}\left[\underline{F}^T\underline{a}\right] = \underline{F}$	$\frac{d}{d\underline{a}}\left[\underline{a}^T\underline{G}\right] = \underline{G}$	$\frac{d}{d\underline{a}}\left[\underline{a}^T H\underline{a}\right] = 2H\underline{a}$

Adjunkte

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & j=1 & j=2 & j=3 \\
i=1 & a11 & a12 & a13 \\
i=2 & a21 & a22 & a23 \\
i=3 & a31 & a32 & a33
\end{array}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{vmatrix}$$

$$x_{ij} \leftrightarrow \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \,|\, a / \text{col } j / \text{row } i \,|$$

Inverse $\forall$ reguläre Matrizen $\exists A^{-1} : A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[\text{Matrix der Adjunkten } \Delta]^T$$

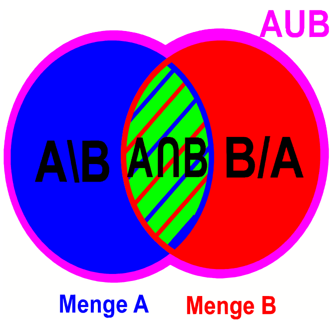
Auch über doppelten Gauss

3. Logik

$p \wedge 1 = p$	$p \wedge 0 = 0$	$p \vee 1 = 1$	$p \vee 0 = p$
$p \wedge \bar{p} = 0$	$p \vee \bar{p} = 1$	$p \wedge p = p$	$p \vee p = p$
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \vee q = q \vee p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$

$(p \Leftrightarrow q) = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ $\quad$ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) = (p \wedge q) \Rightarrow r = (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ $\quad$ $p \Rightarrow q = \bar{q} \Rightarrow \bar{p} = (p \wedge \bar{q}) \Rightarrow \bar{p}$

4. Mengenlehre



$\varnothing \subset M$ $\quad$ $M \subset M$

$(T \subset M) \wedge (M \subset N) \Rightarrow T \subset N$ $\quad$ $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \Rightarrow M = N$

$A / C_M(A) = A$ $\quad$ $A \cap C_M(A) = \varnothing$ $\quad$ $A \cup C_M(A) = M$ $\quad$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup B = B \cup A$ $\quad$ $A \cap B = B \cap A$ $\quad$ $A \cup A = A \cap A = A$ $\quad$ $A \cup \varnothing = A$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ $\quad$ $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$ $\quad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $\quad$ $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \wedge A \cup B = B$

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $\quad$ $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Potenzmenge: $P(M)$ Menge aller Teilmengen von M; $|P(M)| = 2^{|M|}$

Komplementmenge: $C_M(A)$ der Menge A zu einer Grundgesamtheit M

Produktmenge: $A \times B$ ist die Menge aller geordneter Pärchen $\{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (n Mal)

5. Abbildungen und Funktionen

$a^x = e^{x \ln a}$

Eine Abbildung $F: X \to Y$ <u>von</u> X <u>in</u> Y ist jede beliebige Teilmenge F von $X \times Y$. Eine Abbildung $F \subset X \times Y$ heißt eindeutige Abbildung oder Funktion, wenn gilt $(x, y_1) \in F \wedge (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2 \; \forall x \in X$.

$f: X \to Y \quad D(f) = S \subset X \quad W(f) = T \subset Y$

Abbildung <u>aus</u> X <u>in</u> Y	wenn S echte Teilemenge aus X und T echte Teilmenge aus Y sind.
ein-eindeutige Abbildung	wenn jedes Bild genau ein Urbild hat und umgekehrt.
injektiv („Abb. <u>von</u> X <u>in</u> Y)	$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ und $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (ein-eindeutig und $S = X$)
surjektiv („Abb. <u>von</u> X <u>auf</u> Y“)	$\forall\, y \in T\, \exists\, x \in S: f(x) = y$ (gesamter Wertebereich wird überdeckt)
bijektiv	surjektiv und injektiv

ganzrationale Funktionen

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad a_n \neq 0, a_k \in R \;\forall\, k \in \{0 \ldots n\} \Leftrightarrow \text{grad } f(x) = n$

höchstens n reelle Nullstellen, aber genau n Lösungen in C
HORNER-SCHEMA, ist $a + bi$ Nullstelle, so ist auch $a - bi$ Nullstelle

gebrochenrationale Funktionen

$f(x) = \frac{z(x)}{h(x)}: z(x) \text{ mit grad } z(x) = m,\; h(x) \text{ mit grad } h(x) = n$

$$h(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{hebbare Unstetigkeit} & z(x) = 0 \\ \text{Polstelle} & \text{sonst} \end{cases}$$

trigonometrische Funktionen

$\sin(\arcsin x) = x$ $\qquad$ $\arcsin(\sin x) = x$

$\arccos(\sin x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - x\right)$ $\qquad$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \quad \sin\alpha\sin\beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\tan\beta}$

Hyperbel-Funktionen

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\text{arcsin h } y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$ $\qquad$ $\text{arccos h } y = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ $\qquad$ $\text{arctan h } y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\qquad$ $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

6. Relationen

$P = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2 \cdots x_n) : x_i \in X_i, i = 1..n\} \Rightarrow$ P ist n – stellige Relation

Reflexivität $(x, x) \in R \quad \forall x \in M$

Symmetrie $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R \quad \forall x, y \in M$

Antisymmetrie $((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in M$

Transitiv $((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R \quad \forall x, y, z \in M$

Äquivalenzrelation
reflexiv, symmetrisch, transitiv
Klasseneinteilung, disjunkte Teilmengen
Repräsentantensystem: aus jeder Klasse ein Element

Ordnungsrelation
reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
Sei $(M, \quad)$ teilweise geordnete Menge, so ist a

unterer Nachbar	$a \quad b \wedge a \neq b$
oberer Nachbar	$b \quad a \wedge a \neq b$
unmittelbarer Vorgänger	unterer Nachbar $\wedge \nexists x \in M : a \quad x \quad b \; (x \neq a, x \neq b)$
unmittelbarer Nachfolger	oberer Nachbar $\wedge \nexists x \in M : b \quad x \quad a \; (x \neq a, x \neq b)$

sei M eine endliche, teilweise geordnete Menge und $a \quad b$, so enthält M stets eine Kette von a nach b. Wenn $T \subset M$, so können existieren:

$\underline{x} \in T$ kleinstes Element in T	$\underline{x} \quad x \; \forall x \in T$
$\overline{x} \in T$ größtes Element in T	$x \quad \overline{x} \; \forall x \in T$
$\underline{a} \in T$ minimales Element in T	$\nexists x \in T : x \quad \underline{a} \; (x \neq \underline{a})$
$\overline{a} \in T$ maximales Element in T	$\nexists x \in T : \overline{a} \quad x \; (x \neq \overline{a})$
$\underline{s} \in M$ untere Schranke von T	$\underline{s} \quad x \; \forall x \in T$
$\overline{s} \in M$ obere Schranke von T	$x \quad \overline{s} \; \forall x \in T$
$\underline{\underline{g}} \in M$ minimale untere Schranke von T	$\underline{\underline{g}}$ ist untere Schranke $\wedge \underline{s} \quad \underline{\underline{g}} \; \forall \underline{s}$
$\overline{\overline{g}} \in M$ maximale obere Schranke von T	$\overline{\overline{g}}$ ist obere Schranke $\wedge \overline{\overline{g}} \quad \overline{s} \; \forall \overline{s}$

7. Algebraische Strukturen

Ist M eine beliebige Menge, so ist eine eindeutige Abbildung von $M^n \to M$ eine n-stellige algebraische Operation.
Eine algebraische Struktur ist eine Gesamtheit (M, Ω) mit M als beliebige Menge und Ω eine Menge von Operationen über M.

linksneutrales Element	$e_l : e_l \otimes a = a \ \forall a \in M$	$\exists e_l \wedge \exists e_r \Leftrightarrow e_l = e_r = e$
rechtsneutrales Element	$e_r : a \otimes e_r = a \ \forall a \in M$	
neutrales Element	$e : e \otimes a = a \otimes e = a \ \forall a \in M$	
linksinverses Element	$a_l^{-1} : a_l^{-1} \otimes a = e$	
rechtsinverses Element	$a_r^{-1} : a \otimes a_r^{-1} = e$	
inverses Element	$a^{-1} \otimes a = a \otimes a^{-1} = e$	
Potenz	$a \otimes a \otimes ... \otimes a \ (n \text{ Mal}) = a^n$	

Algebraische Struktur	(M, Ω)	M beliebig, Ω beliebig
Gruppoid	$(M, \otimes)$	$\otimes : M \times M \to M$ $(\otimes \text{ ist binäre Operation})$
Halbgruppe	Gruppoid	mit $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \ \forall a,b,c \in M$ $(\otimes \text{ ist assoziativ})$
Monoid	Halbgruppe	mit neutralem Element $e : e \otimes a = a \otimes e = a \ \forall a \in M$
Gruppe	Monoid	$\forall a \ \exists a^{-1} \otimes a = a \otimes a^{-1} = e$
Abelsche Gruppe	Gruppe	mit $a \otimes b = b \otimes a \ \forall a, b \in M$ $(\otimes \text{ ist kommutativ})$
zyklische Gruppe	Gruppe	$\forall$ Elemente sind Potenzen eines Elements $e = a^0 = a^n, a^1, ..., a^{n-1}$
Ring	$(M, \{\otimes, \oplus\})$	$(M, \oplus)$ ist Abelsche Gruppe $(M, \otimes)$ ist Halbgruppe $\otimes$ geht vor $\oplus$ Distributivität $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$, $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$ Θ Nullelement, neutrales Element bezüglich $\oplus$ existiert immer $\Rightarrow \Theta \otimes a = a \otimes \Theta = \Theta \ \forall a \in M$ $-a$ inverses Element bezüglich $\oplus$ e (oder ①) Einselement, neutrales Element bezüglich $\otimes$ $a \otimes e = e \otimes a = a$ (a ⊗ ① = ① ⊗ a = a)
Integritätsbereich	Ring	$(M, \otimes)$ ist kommutativ, ① existiert immer Nullteilerfreiheit: $a \otimes b = \Theta \Rightarrow (a = \Theta) \vee (b = \Theta)$

Körper	Integritäts-bereich	$(M \setminus \Theta, \otimes)$ ist kommutative Gruppe mit Einselement	
	(i)	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \ \forall\, a, b, c \in M$	*Assoziativität*
	(ii)	$\exists\, \Theta : a \oplus \Theta = \Theta \oplus a = a \ \forall a \in M$	*Nullelement*
	(iii)	$a \oplus b = b \oplus a \ \forall a, b \in M$	*Kommutativität*
	(iv)	$\forall a \in M \ \exists (-a) \in M : a \oplus (-a) = \Theta$	*Invertierbarkeit*
	(v)	$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \ \forall a, b, c \in M$	*Assoziativität*
	(vi)	$\exists\, e \in M : a \otimes e = e \otimes a = a \ \forall a \in M$	*Einselement*
	(vii)	$a \otimes b = b \otimes a \ \forall a, b \in M$	*Kommutativität*
	(viii)	$\forall a \in M, a \neq \Theta : \exists\, a^{-1} \in M : a \otimes a^{-1} = e$	*Invertierbarkeit*
	(ix)	$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \ \forall a, b, c \in M$	*Distributivität*

Boolesche Algebra	$\left(M, \{\otimes, \oplus, \overline{}\}\right)$	$\otimes, \oplus$ binäre Operationen, gleichberechtigt $\overline{}$ unäre Operation 0 neutrales Element bezüglich $\oplus$ I neutrales Element bezüglich $\otimes$
	(i)	$x \oplus y = y \oplus x$ und $x \otimes y = y \otimes x \ \forall x, y \in M$
	(ii)	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ und $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \ \forall x, y, z \in M$
	(iii)	$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ und $x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z) \ \forall x, y, z \in M$
	(iv)	$x \oplus 0 = x, \ x \otimes I = x \ \forall x \in M$
	(v)	$x + \overline{x} = I, \ x \otimes \overline{x} = 0 \ \forall x \in M$

8. Linearer Raum

E ist linearer Vektorraum über K (K = Zahlenkörper, E = beliebige Menge), wenn

1)	$x + y \in E \ \forall\, x, y \in E$		2)	$\lambda\, x \in E \ \forall x \in E, \lambda \in K$	
3)	$x + y = y + x \ \forall x, y \in E$	*Kommutativität*	4)	$x + (y + z) = (x + y) + z \ \forall x, y, z \in E$	*Assoziativität*
5)	$\exists\, 0 \in E : x + 0 = x \ \forall x \in E$	*Nullelement*	6)	$\forall\, x \in E \ \exists\, (-x) \in E : (-x) + x = 0$	
7)	$1 * x = x \ \forall\, x \in E$	*Einselement*	8)	$\lambda\, (\mu\, x) = (\lambda\, \mu)\, x \ \forall\, \lambda, \mu \in K, x \in E$	
9)	$\lambda\, (x + y) = \lambda\, x + \lambda\, y \ \forall\, \lambda \in K, x, y \in E$		10)	$(\lambda + \mu)\, x = \lambda\, x + \mu\, x \ \forall\, \lambda, \mu \in K, x \in E$	

Linearkombination $=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_m x_m=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i \in E$

($x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$, Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$)

lineare Hülle von $x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$ ist $\text{span}\,(x_1, x_2, \ldots x_m)=\left\{\sum_{j=i}^{m}\lambda_i x_i : \forall\,\lambda \in K\right\}$

linear unabhängig $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$ (sonst linear abhängig) $\Rightarrow$ LGS

Basis X n linear unabhängige Elemente im n-dimensionalen Raum E sind Basis X

jedes Element in E kann durch Linearkombination der Basis dargestellt werden $X_a=(x_1,\ldots,x_m)*\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \ldots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_1 = x$

linearer Unterraum U (Teilraum) $\lambda x+\mu x \in U\ \forall x, y \in U, \lambda, \mu \in K \Rightarrow 0 \in U, \{0\}$ ist Unterraum

lineare Hülle von m (<n) Elementen aus E ist stets linearer Unterraum

lineare Mannigfaltigkeit $x+U=\{y=x+z : \forall z \in U\}$, x ist fest und $\in E$

Skalarprodukt (inneres Produkt) $\langle x, y\rangle = z$ ordnet jedem Paar $x, y \in E$ eine Zahl $z \in K$ zu, wenn gilt:

Länge der Projektion von y auf x.

(i)	$\langle x+y, z\rangle=\langle x, z\rangle+\langle y, z\rangle\ \forall x, y, z \in Z$
(ii)	$\langle \lambda x, y\rangle=\lambda\langle x, y\rangle\ \forall x, y \in E, \lambda \in Z$
(iii)	$\langle x, y\rangle=\overline{\langle y, x\rangle}\ \forall x, y \in E$ (konjugiert komplex)
(iv)	$\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0\ \forall x \in E$
$\Rightarrow 1$	$\langle x, y+z\rangle=\langle y, y\rangle+\langle x, z\rangle\ \forall x, y, z \in E$
$\Rightarrow 2$	$\langle x, \lambda y\rangle=\bar{\lambda}\langle x, y\rangle$

Skalarprodukt hier und nicht bei Vektoroperationen

Cauchy-Schwarz-Bunjakowskysche Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$

$\boxed{R^n : \langle x, y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i}$ $\boxed{\vec{a}*\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})}$

unitärer Raum Raum mit Skalarprodukt

Orthogonal $x, y \in E$ orthogonal $\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$

Orthonormalbasis (ONB) Ist Basis $X=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von E mit $\langle x_i, x_j\rangle=\delta(i,j)=\begin{cases}0 & i \neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

1)		$\alpha_{11}^2=\langle y_1, y_1\rangle \Rightarrow$	$\alpha_{11}=\sqrt{\langle y_1, y_1\rangle}$	$x_1=\frac{1}{\alpha_{11}}y_1$
2)	$\alpha_{21}=\langle y_2, x_1\rangle$	$\tilde{x}_2=y_2-\alpha_{21}x_1$	$\alpha_{22}=\sqrt{\langle \tilde{x}_2, \tilde{x}_2\rangle}$	$x_2=\frac{1}{\alpha_{22}}\tilde{x}_2$
3)	$\alpha_{ki}=\langle y_k, x_i\rangle : i=1..k-1$	$\tilde{x}_k=y_k-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{ki}x_i$	$\alpha_{kk}=\sqrt{\langle \tilde{x}_k, \tilde{x}_k\rangle}$	$x_k=\frac{1}{\alpha_{kk}}\tilde{x}_k$

Transformationsmatrix Die Spalten von T sind die Basiselemente der Basis A dargestellt in Basis B.

9. Vektoroperationen

Skalarprodukt siehe vorige Seite

$\langle x, y\rangle = z = x * y$ Länge der Projektion von y auf x

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

$\text{Vektor} \times \text{Vektor} = \text{Vektor}$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} = \vec{v} : \left| \vec{v_1} \times \vec{v_2} \right| = A(\, \Delta(\vec{v_1}, \vec{v_2})\,)$$

Rechte-Hand-Regel

$$\vec{v_1} \parallel \vec{v_1} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \quad \vec{v_1} \perp \vec{v_1} \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \max = \left|\vec{v_1}\right| \left|\vec{v_1}\right| \quad \left|\vec{v}\right| = \left|\vec{v_1}\right| \left|\vec{v_1}\right| \sin\angle\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}\right)$$

Betrag Vektor = Fläche des durch $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ aufgespannten Parallelogramms

Spatprodukt

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) * \vec{c} = \beta = \begin{vmatrix} a_x & b_b & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

Volumen des durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates, = 6 * Pyramide (Tetraeder)

$\perp - \parallel$ - Zerlegung

$$\vec{a_{\parallel}} = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2} \vec{b} = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2} \vec{a} \qquad \vec{a_{\perp}} = \vec{a} - \vec{a_{\parallel}}$$

Normen

$$\left\| \vec{a} \right\|_p = \sqrt[p]{|\,a_1\,|^p + |\,a_2\,|^p + \ldots + |\,a_n\,|^p} \qquad \left\| \vec{a} \right\|_\infty = \max \left\{ |\,a_i\,| \right\}$$

Matrixnomen

Zeilensummennorm $\| A \| = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |\,a_{i\,j}\,|$ verträglich mit Maximumnorm

Spaltensummennorm $\| A \| = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |\,a_{i\,j}\,|$ verträglich mit Summennorm

Verträglichkeit $\| Ax \|_V \le \| A \|_M \| x \|_V$

$$\left(\sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|^n \right)^{\frac{1}{n}} \le \text{Matrixnorm} * \text{Vektornorm} \left(\sqrt[p]{|\,a_1\,|^p + |\,a_2\,|^p + \ldots + |\,a_n\,|^p} \right)$$

10. Punkt, Gerade, Ebene

Punkt $A:\vec{a}$

Punkt-Punkt	Abstand	$\left\lvert \overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_2} \right\rvert$

Gerade $g:\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{r}$ $\quad (\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{r} = \vec{0}$

Punkt-Gerade	Abstand	$\dfrac{\left\lvert (\vec{a} - \vec{p}) \times \vec{r} \right\rvert}{\left\lvert \vec{r} \right\rvert}$
Gerade-Gerade	Abstand	$\dfrac{\left\lvert (\overrightarrow{p_1} - \overrightarrow{p_2})(\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2}) \right\rvert}{\left\lvert \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2} \right\rvert}$
	Schnittpunkt	LGS $\lambda_1 \overrightarrow{r_1} - \lambda_2 \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$
	parallel	wenn kein Schnittpunkt oder $\overrightarrow{r_1} = \gamma \overrightarrow{r_2}$
	gleich	wenn unendlich viele SP, parallel und $\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_1} + \lambda \overrightarrow{r_1}$ oder Abstand = 0

Ebene $e:\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ $\quad \left.\begin{array}{r} (\vec{x} - \vec{p})\,\vec{n} = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \end{array}\right\} \vec{n} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{\left\lvert \vec{u} \times \vec{v} \right\rvert}$ $\quad (\vec{u} \times \vec{v})(\vec{x} - \vec{p}) = 0 = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x} - \vec{p}]$

Punkt-Ebene	Abstand	$\dfrac{\left\lvert (\vec{a} - \vec{p})\,\vec{n} \right\rvert}{\left\lvert \vec{n} \right\rvert}$ $\quad \alpha a_x + \beta a_y + \gamma a_z - \delta$
Gerade-Ebene	Schnittpunkt	LGS $\overrightarrow{p_e} + \lambda_e \vec{u} + \mu \vec{v} - \lambda_g \vec{r} = \overrightarrow{p_g} - \overrightarrow{p_e}$ nicht lösbar: parallel Abstand: siehe Punkt-Ebene unendlich viele Lösungen: Gerade liegt in Ebene
Ebene-Ebene	Schnittgerade	LGS $\lambda_1 \overrightarrow{u_1} + \mu_1 \overrightarrow{v_1} - \lambda_2 \overrightarrow{u_2} - \mu_2 \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1} \approx\Rightarrow \lambda_2 = \alpha + \beta\mu_2$ SG: $g:\vec{x} = \left(\overrightarrow{p_2} + \alpha \overrightarrow{u_2}\right) + \lambda\left(\beta \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_2}\right)$ nicht lösbar: parallel Abstand: siehe Punkt-Ebene unendlich viele Lösungen: Ebenen gleich
mehrere Ebenen	Normalenform einsetzen, LGS lösen Ergebnis sind die Punkte auf dem Schnittgebilde	$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$ $a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$ .... $a_n x + b_n y + c_n z = d_n$

11. lineare Operatoren

$A : E_1 \to E_2$

Additivität: $A(x+y) = A(x) + A(y)$
Homogenität: $A(\lambda x) = \lambda A(x)$

ist $\det A \neq 0 \Rightarrow$ ein-eindeutiger Operator
ist A symmetrisch $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ sonst $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle$

Matrixdarstellung

Spalten von A sind Bilder der Basiselemente von E_1 in der Basis E_2
Anzahl Spalten = dim E_1
Anzahl Zeilen = dim E_2

12. Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte λ	$A \in R^{n\times n} \quad \exists \lambda \in R, \vec{x} \in R^n : \vec{x}A = \lambda\vec{x}$ Eigenvektormatrix X $\forall \lambda \in R \Rightarrow \det A = \Pi\lambda$
charakteristisches Polynom	$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ Lösungen des Polynoms $\chi(\lambda) = 0$ setzen ergibt Eigenwerte.
Diagonalisieren	$\Lambda = X^{-1}AX \quad \in R \Rightarrow X^T AX$ Diagonalisieren geht mit Matrix der normierten Eigenvektoren.
Ähnlichkeitstransformation	$B = X^{-1}AX \Rightarrow$ gleiche Eigenwerte λ
Eigenvektoren bestimmen	entweder sehen, oder λ in Matrix einsetzen, Gauss machen, Ergebnis kommt raus in Abhängigkeit von irgendwas = EV
algebraische Vielfachheit a	Vielfachheit einer Lösung des charakteristischen Polynoms
geometrische Vielfachheit g	Anzahl der Eigenvektoren zu einer Lösung des charakteristischen Polynoms

$$\mathbf{1 \leq g \leq a}$$

13. Grenzwerte

konvergente Folgen sind beschränkt
beschränkte monotone Folgen haben einen Grenzwert / sind konvergent

bestimmt divergent: $\lim a_k = \infty$
unbestimmt divergent: sonst
Dreifolgensatz $a_k \le b_k \le c_k \ \forall k \ge N_0 \ \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} c_k$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \text{div} & \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{k\to\infty} q^k = \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 0 \\ \text{div} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim \ f^x \ ?? \ \ln \ \lim \ f^x = \lim \ \ln \ f^x = \lim \ x \ \ln \ f \ !! \Rightarrow \lim \ f^x = e^{x \ln \lim f}$$

stetig $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ evtl. Maximum, Minimum

unstetig 1. Art $g_1 = \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) \quad g_2 = \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)$ Supremum, Infimum

hebbar $g_1 = g_2$, nur $f(x_0)$ nicht definiert oder $\neq g_1$ bzw. $\neq g_2$
Sprungstelle $g_1 \neq g_2$

2. Art mindestens ein Grenzwert ist uneigentlich ($\pm\infty$) unbestimmt divergent
Polstelle $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$
unbestimmt Divergent mindestens ein Grenzwert existiert nicht

diffbar $\exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = g$

l'Hospital $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Mittelwertsatz $f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \upsilon(x-x_0))(x-x_0)$

Taylor-Entwicklung $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ oder $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$

14. Flächen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz + j = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + j = 0$$

mit Eigenwerten Eigenvektoren bestimmen, Eigenvektormatrix A zum Diagonalisieren benutzen.
(siehe 12. Eigenwerte und Eigenvektoren)

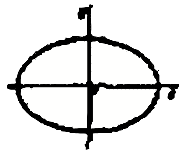
$$\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \end{pmatrix} A^T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + j = 0$$

neues Polynom aufstellen $\lambda_1 x_n{}^2 + \lambda_2 y_n{}^2 + \lambda_3 z_n{}^2 + \ldots + j = 0$

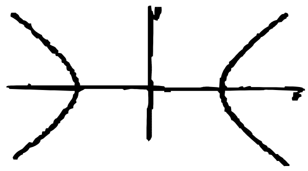
Quadratische Ergänzung machen

Die Normalform der Quadriken im R2 (Konstante a,b,p alle = 0)

Rang A = 2 **(Alle Eigenwerte $\neq 0$)**

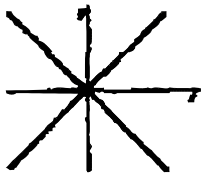


$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **Ellipse (evtl. Kreis)**



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$ **leere Menge**

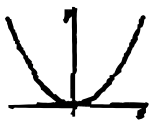
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ **Hyperbel**



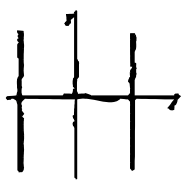
$x^2 + a^2 y^2 = 0$ **Punkt**

$x^2 - a^2 y^2 = 0$ **Geradenpaar mit Schnittpunkt**

Rang A = 1 **(Ein Eigenwert = 0)**

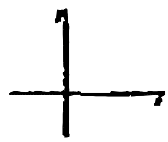


$x^2 - 2py = 0$ **Parabel**



$x^2 - a^2 = 0$ **paralleles Geradenpaar**

$x^2 + a^2 = 0$ **leere Menge**

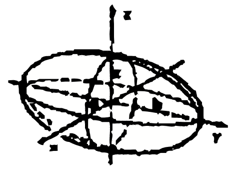
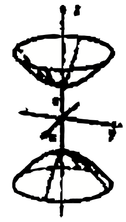
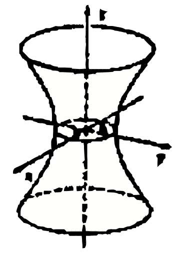
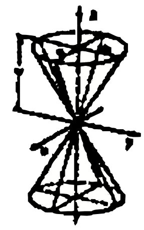


$x^2 = 0$ **Gerade $x = 0$**

Die Normalformen der Quadriken im $\mathbb{R}_3$ (Konstante a, b, c, p alle $\neq 0$)

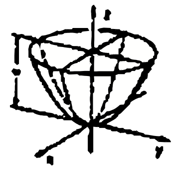
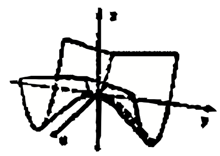
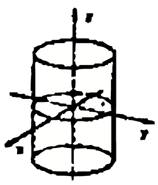
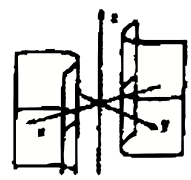
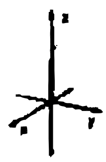
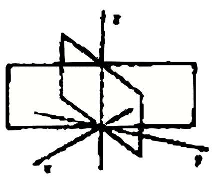
Rang $A = 3$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	Ellipsoid (evtl. Kugel)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$	einschaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	Punkt
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	Kegel

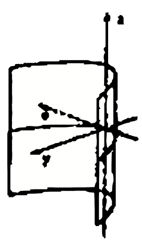
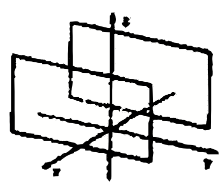
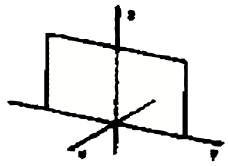
Rang $A = 2$ (Ein Eigenwert $= 0$)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$	elliptisches Paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$	hyperbolisches Paraboloid
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	leere Menge
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	elliptischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Gerade
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Ebenenpaar mit Schnittgerade

Rang $A = 1$ (Zwei Eigenwerte $= 0$)

$x^2 - 2py = 0$	parabolischer Zylinder
$x^2 - a^2 = 0$	paralleles Ebenenpaar
$x^2 + a^2 = 0$	leere Menge
$x^2 = 0$	Ebene

15. Kurven

Tangentenanstieg $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$ Tangentenvektor $\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ Normalenvektor $\begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$

Schnittpunkt mit x-Achse: y = 0

Schnittpunkt mit y-Achse: x = 0

Tangente || x-Achse: $\dot{y}(t_0) = 0$

Tangente || y-Achse: $\dot{x}(t_0) = 0$

singuläre Punkte

Doppelpunkt	$t_1 \neq t_2, x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)$	
	2 Tangenten	$\frac{\dot{y}(t_1)}{\dot{x}(t_1)} \neq \frac{\dot{y}(t_2)}{\dot{x}(t_2)}$
	Berührungspunkt	Tangenten parallel
isolierter Punkt	keine Tangente	
Rückkehrpunkt	(Spitze)	$\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$ (doppelte Tangente)
Knickpunkt	$\lim\limits_{t \downarrow t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \neq \lim\limits_{t \uparrow t_0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$	
Asymptotenpunkt	$\lim\limits_{t \to \infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$	

konvex f'' > 0

konkav f'' < 0

16. Ableitungen / Differentialrechnung

$f = c\,u$	$f' = c\,u'$
$f = u\,v$	$f' = u'v + v'u$
$f = u(v(x))$	$f' = v'(x)\,u'(v(x))$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
$f = \frac{u}{v}$	$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$

partielle Ableitungen

mit Nabla-Operator

$$\nabla f = \text{grad } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Hessian

Matrix aus allen partiellen Ableitungen

$$\nabla^2 f = H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Richtungsableitungen

$$\nabla f * a : \| a \| = 1$$

Tangentialebene:

1. Ansatz

$$T_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \right\} \qquad n = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(y_0) \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in Z$$

2. Ansatz $z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

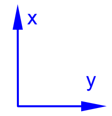
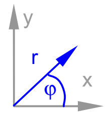
totales Differential: $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ $\qquad df \approx \Delta f$ für Fehlerrechnung

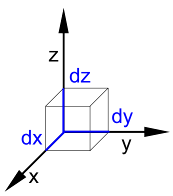
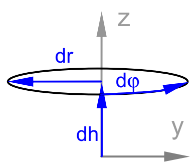
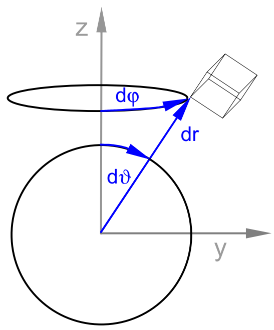
Extremwerte

$\nabla f \overset{!}{=} 0$	zur Berechnung von statischen Punkten	
$\nabla^2 f = H$	positive definit	$\Rightarrow$ Minimum, det d. Hauptminoren > 0
	negativ definit	$\Rightarrow$ Maximum, det d. Hauptminoren alternierende VZ (a_{11}-negativ)
	sonst	keine Aussage (Sattelpunkt)

mit Nebenbedingungen: Lagrange: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda_1 y_1 + [\lambda_n y_n]$

17. Koordinatensysteme

kartesische Koordinaten	polare Koordinaten
	
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ $dA = dx\,dy \quad A = \int_0^a dx \int_0^b dy = ab$	$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \arg(x+iy)$ $dA = dr\,r\,d\varphi \quad A = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2$

kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
		
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = h$ $x = r\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta,$ $z = r\cos\vartheta;\ \varphi \in [0;2\pi]\ \vartheta \in [0;\pi]$	$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \arg(x+iy),\ h = z$	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \varphi = \arg(x+iy,)$ $\vartheta = \arccos\frac{z}{r}$
$dV = dx dy dz$ $V = \iiint dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz = abc$	$dV = r\ d\varphi\, dr\, dh$ $V = \int_0^H dh \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^2 H$	$dV = r^2\, dr\, d\varphi \sin\vartheta\, d\varphi$ $V = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\,\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{3}\pi R^3$

Ebenensymmetrie	Zylindersymmetrie	Kugelsymmetrie
$\frac{\partial}{\partial \vec r} V(\vec r) = \frac{\partial}{\partial \vec r} f(\vec a \vec r) = f'(\vec a \vec r)\vec a$ Immer bei Skalarprodukt.	$\frac{\partial}{\partial \vec r} V(\vec r) = \frac{\partial}{\partial \vec r} f\left(\vec e \times \vec r\right) = f' \vec e \times \left(\vec e \times \vec r\right)$ Immer bei Kreuzprodukt.	$\frac{\partial}{\partial \vec r} V(r) = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial \vec r} = V' \frac{\vec r}{r}$ Immer bei V(r) und nicht $V(\vec r)$.

18. Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad : \quad \xi \in [a;b]$$

Hauptsatz der Differential- und IntegralRechnung

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad : \quad F'(x) = f(x), x \in [a;b]$$

Integration durch Substitution

$\int f(g(x))\,dx$ setzen: $g(x) = z, z' = \frac{dz}{dx}$

folglich: $\int f(z)\,dz \Rightarrow$ Grenzen einsetzen!

partielle Integration

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx \;;\; \int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Flächenberechnung

kartesisch $\quad A = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx$

polar $\quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{f^2(\varphi)}{2}\,d\varphi$

Parameter $\quad A = \int_a^b \left(y(t) * \dot{x}(t) \right) dt$

Leibnitz Sektor (überschneidungsfrei, geschlossen) $\quad A = \frac{1}{2}\left(\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(t)\,x(t) - y(t)\,\dot{x}(t)\,dt \right)$

Bogenlänge

kartesisch $\quad ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}$

polar $\quad ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}$

Parameter $\quad ds = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$

Rotationskörper

Volumen $\quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

Mantelfläche $\quad A = 2\pi \int_a^b f(x)\,ds(x) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,f(x)\,dx$

Schwerpunkt

Kurvenstück $\quad x_s = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx} \qquad y_s = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$

Fläche $\quad x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x * f(x)\,dx \qquad y_s = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{f^2(x)}{2}dx$

Kurvenintegral 1. Art $K\int f(x)\,ds = K\int_A^B f(x,y)\,ds = \int_{t_a}^{t_b} f[x(t),y(t)]\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\;dt$

Kurvenintegral 2. Art $I = \int_K P\,dx = \int_a^b P_1\,\dot{x}\,dt + P_2\,\dot{y}\,dt$ $\Rightarrow$ Kurve parametrisieren

Volumenberechnung $V = \iiint_\Omega dV = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ $z=f(x,y): V = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$

$$\oiint_A \vec{f}(\vec{r})\,d\vec{A} = \iiint_{V(A)} \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{f}(\vec{r})\,dV = \iiint_{V(A)} \nabla\,\vec{f}(\vec{r})\,dV$$

$$\oint_C \vec{f}(\vec{r})\,d\vec{r} = \iint_{A(C)} \left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\times\vec{f}(\vec{r})\right)d\vec{A} = \iint_{A(C)} \left(\nabla\times\vec{f}(\vec{r})\right)d\vec{A}$$

19. Differentialgleichungen

homogene DGL

Trennung der Veränderlichen $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Integrieren: y(x) bis auf Konstante bestimmbar oder $Y' = \frac{dy}{dx}$

evtl. Substituieren: Konst. durch AWP bestimmbar

inhomogene DGL

Ansatz: $y = Y_H + y_p$

$y'(x) + p(x)\,y(x) = g(x)$

$Y_H = C * e^{-\int p(x)\,dx}$

$y_p = D(x) * e^{-\int p(x)\,dx}$

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow v = \frac{y}{x} \qquad \int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x}}$$

$\Rightarrow$ Einsetzen in DGL: $D(x) = \int g(x) * e^{\int p(x)\,dx}\,dx$

höhere Ordnung

homogene DGL

Ansatz $Y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \ldots$

$\alpha_n\lambda^n + \ldots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = \partial$ alle Nullstellen bestimmen

$y = C_1 * e^{\lambda_1 x} + C_{2*}e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n * e^{\lambda_n x}$

bei mehrfach NS jeweils Ansatz mit x erweitern

$\lambda \in C$: Euler-Zerlegung: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$\lambda = a \pm i\,b \Rightarrow y = \ldots + C_n\cos(bx)\,e^{ax} + C_{n+1}\sin(bx)e^{ax}$

inhomogene DGL

Störgliederansätze siehe Göhler S.83
bei Resonanzfall (oder wenn y fehlt) Ansatz mit x erweitern
Summen von g(x) $\Rightarrow$ Summen der Ansätze

$g(x) = ae^{bx} \Rightarrow Ae^{bx}$

$g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \quad a_1 x + a_0 \Rightarrow A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \quad A_1 x + A_0$

$g(x) = a\sin bx + c\cos bx \Rightarrow A\sin bx + C\cos bx$

20. Permutationen und Kombinationen

mögliche Versuchsausgänge (n aus M)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
geordnet	M^n	$\frac{M!}{(M-n)!}$
ungeordnet	$\binom{M+n-1}{n}$	$\binom{M}{n}$

21. Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = \frac{\#\text{ günstige Ereignisse}}{\#\text{ Ereignisse gesamt}} \qquad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

Satz von Bayes: $$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)\, P(A_i)}{P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)\, P(A_j)}$$

22. Erwartungswert und Varianz

$$EX = \sum_{\forall i} x_i\, P(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$D^2X = E(X-EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{\forall i} (x_i - EX)^2\, P(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - (EX)^2$$

$$D^2 aX = a^2 D^2 X$$

23. Momente

Ordnung = Summe der Potenzen der Zufallsvariablen

gewöhnlich

eine Zufallsvariable $$m_{x^\alpha} = m_\alpha = E\{X^\alpha\}$$

mehrere Zufallsvariablen $$m_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}} = m_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = k_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \{EX_1^{\alpha_1} * X_2^{\alpha_2} * \dots * X_n^{\alpha_n}\}$$

zentral

eine Zufallsvariable $$\mu_{x^\alpha} = \mu_\alpha = E(X - m_1)^\alpha = E(X - EX)^\alpha$$

mehrere Zufallsvariablen $$\mu_{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}} = \mu_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \sigma_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = E\left(X_1 - m_{x_1^1}\right)^{\alpha_1} * \left(X_2 - m_{x_2^1}\right)^{\alpha_2} * \dots * \left(X_n - m_{x_n^1}\right)^{\alpha_n}$$

$$\text{Schiefe}: \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}$$

$$\text{Exzess}: \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

$$\text{Wölbung}: \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

24. Verteilungen

$$F(x)=P(X<x)=\sum_{x_i<x} p_i=\int_{-\infty}^{x_i} f(x)\,dx$$

diskrete Zufallsgrößen

Hypergeometrische Verteilung *H_n (k; N, M)*

Lottomodell (n aus N mit m von M Guten)

$$P(x=m)=\frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

$EX=n\frac{M}{N}$ $\quad D^2X=n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$

Binominalverteilung (Bernoulli) *B(n; p)*

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$EX=np$ $\quad D^2X=np(1-p)$

maximale Varianz bei Messung $D^2X=\frac{p(1-p)}{n}$

Poisson-Verteilung *$\pi\,\lambda$*

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$EX=\lambda$ $\quad D^2X=\lambda$

Ereignisse blitzartig, in unendlich kleiner Zeit keine Ereignisse, Anzahl von Intervalllänge und nicht Lage abhängig, bei sich nicht überlappenden Intervallen stochastisch unabhängig

dazu: Poisson-Prozess

$$P(X_t=k)=\frac{(\mu t)^k}{k!}e^{-\mu t}$$

X_t ... # Ereignisse im Intervall der Länge t
Y … Abstand zwischen zwei Ereignissen

$$P(Y\le y)=P(Y<y)=\begin{cases}1-e^{-\mu y}\\ 0\end{cases}$$

$EX_t=\mu t=\lambda$ $\quad D^2X_t=\mu t=\lambda$

stetige Zufallsgrößen

Normalverteilung *$N(\mu, \sigma^2)$*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$EX=\mu$ $\quad D^2X=\sigma^2$

Normieren auf $N(0, 1)$: $P(X\le x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(X\le x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz$$

Exponentialverteilung *exp(λ)*

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$EX=\frac{1}{\lambda}$ $\quad D^2X=EX=\frac{1}{\lambda^2}$

$$P(X\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

Gleichverteilung

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$EX=\frac{1}{2}(b-a)$ $\quad D^2X=\frac{1}{12}(b-a)^2$

$$P(X\le x)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & x<a\\ 1 & x>b\end{cases}$$

25. Mehrere Verteilungen

mehrere Normalverteilungen $\sum X \sim N\left(\sum \mu_i , \sum \sigma_i^2\right)$

Achtung bei einer Verteilung die zweimal vorkommt!!

mehrere Exponentialverteilungen $\sum X \sim \exp\left(\sum \lambda_i\right) = \exp\left(\sum \frac{1}{EX_i}\right)$

26. Grenzwertbetrachtungen

Zentraler Grenzwertsatz

$$P(Z < x) \approx \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} < x \Rightarrow \Phi$$

Moivre-LaPlace

bei $n\,p\,(1-p) \geq 9$ oder wenigstens ≥ 4

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right)$$

mit Stetigkeitskorrektur

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0{,}5 \leq X \leq b + 0{,}5) = \Phi\left(\frac{b + 0{,}5 - np}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0{,}5 - np}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right)$$

Poisson

$$np << 10 \wedge n >> 1500p \Rightarrow \text{Poissonverteilung } P\,(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} : \lambda = np$$

Tschebbysheff

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2X}{\varepsilon^2}$$

27. Konfidenzintervalle

Fehlerwarscheinlichkeit α
Für einseitige Intervalle: $1-\frac{\alpha}{2}$ durch $1-\alpha$ ersetzen.
Anzahl der Messungen ist n, daher n – 1 Freiheitsgrade

Verteilung	**gesucht**	**Intervall**
$B(1,p)$	p	$\frac{n}{n+z^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\left(\bar{x}+\frac{1}{2n}z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \pm \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{x}\left(1-\bar{x}\right)}{n}+\left(\frac{1}{2n}z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2}\right]\right)$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	$\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}$
$N(\mu,\sigma^2)$	σ^2	$(n-1)\frac{s^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \quad ... \quad (n-1)\frac{s^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}$

28. Tests

Verteilung der Grund-gesamtheit	H_0	H_1	**Testfunktion** $T(X_1,\dots,X_n)$	**kritischer Bereich K**	**Bemerkungen**
$N(\mu,\sigma^2)$	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$\lvert T\rvert > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	σ^2 ist bekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$T>z_{1-\alpha}=z_\gamma$	σ^2 ist bekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$T<-z_{1-\alpha}=-z_\gamma$	σ^2 ist bekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{S_n}\sqrt{n}$	$\lvert T\rvert > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	σ^2 ist unbekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{S_n}\sqrt{n}$	$T>t_{n-1,1-\alpha}$	σ^2 ist unbekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T=\frac{\overline{X}_n-\mu_0}{S_n}\sqrt{n}$	$T<-t_{n-1,1-\alpha}$	σ^2 ist unbekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\sigma^2=\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$T=(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma_0^2}$	$T<\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}$ oder $T>\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	μ ist unbekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$T=(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma_0^2}$	$T>\chi^2_{n-1,1-\alpha}$	μ ist unbekannt
$N(\mu,\sigma^2)$	$\sigma^2\geq\sigma_0^2$	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$T=(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma_0^2}$	$T<\chi^2_{n-1,\alpha}$	μ ist unbekannt
$B(1,p)$	$p=p_0$	$p\neq p_0$	$T=\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$	$\lvert T\rvert > z_{1-\alpha/2}$	$\overline{X}$: rel. Häufigkeit n muß groß sein
$B(1,p)$	$p\leq p_0$	$p>p_0$	$T=\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$	$T>z_{1-\alpha}$	$\overline{X}$: rel. Häufigkeit n muß groß sein
$B(1,p)$	$p\geq p_0$	$p<p_0$	$T=\frac{\overline{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$	$T<-z_{1-\alpha}$	$\overline{X}$: rel. Häufigkeit n muß groß sein
$N(\mu_A,\sigma_A^2)$ $N(\mu_B,\sigma_B^2)$	$\mu_A=\mu_B$	$\mu_A\neq\mu_B$	$T=\frac{\left(\overline{X}_A-\overline{X}_B\right)\sqrt{\frac{n_A n_B}{n_A+n_B}}}{\sqrt{\frac{(n_A-1)S_A^2+(n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2}}}$	$\lvert T\rvert > t_{n_A+n_B-2,1-\frac{\alpha}{2}}$	n_A, n_B müssen groß sein

29. Notationen

$f = O(g)$	$\exists\, c, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq c\, g(n)$ „f wächst nicht schneller als g“
$f = \Omega(g)$	$\exists\, c, \exists\, n_0 : \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq c\, g(n) \equiv g = O(f)$ „f wächst mindestens so schnell wie g“
$f = \Theta(g)$	$f = O(g)$ und $g = O(f)$ „f und g sind von der selben Größenordnung“
$f = o(g)$	$f(n) / g(n)$ ist Nullfolge „f wächst langsamer als g“
$f = \omega(g)$	$g = o(f)$ „f wächst schneller als g“

30. spezielle Formeln

Summe der ersten **n** natürlichen Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

Summe der ersten **n - 1** natürlichen Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \binom{n}{2}$$

Summe der **Quadrate** der ersten **n** natürlichen Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

Summe der **3. Potenz** der ersten **n** natürlichen Zahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right]^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{a^n - 1}{a - 1} \qquad \sum_{i=1}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} - 1 \qquad \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Potenzfolge:

$$\sum_{i=0}^{n} i\, a^i = \sum_{i=1}^{n} i\, a^i = a\, \frac{a^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{i} = \binom{n}{i+1} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$