UNI KASSEL
VERSITÄT

Professur Verteilte Systeme

Herleitungen zu Warteschlangenmodellen

http://www.uni-kassel.de/
http://www.vs.eecs.uni-kassel.de/

Thomas Weise
weise@vs.uni-kassel.de

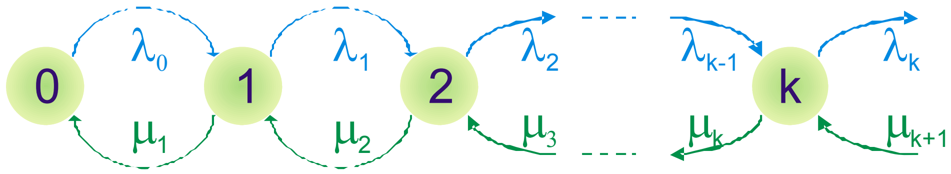
2005-12-01

Vorbemerkung

Dieses Dokument ist lediglich als Hilfe zum Verständnis für die Warteschlangentheorie, wie wir sie für die Vorlesung/Übung Betriebssysteme brauchen, gedacht. Es ist keine vollständige oder mathematisch erschöpfende Abhandlung, sondern lediglich eine kleine Hilfestellung. Auch wird hier die Mathematik oft recht krude genutzt, da lediglich das praktische Verstehen gefördert werden soll und keine intensiveren mathematischen Überlegungen angestellt werden.

Inhalt

A. Markov-Geburts- und Todesprozess



Wir wollen die stationären Wahrscheinlichkeiten p_i finden, dass sich das allgemeine Markovsche Geburts- und Todessystem im Zustand i befindet.

Da wir den stationären Zustand voraussetzen müssen die nächsten beiden Formeln gelten. Andernfalls sind die Gleichungen die nachfolgend das System beschreiben nicht lösbar.

(1) $\lambda < \mu$

(2) $P(\text{verlasse Zustand}\, i) = P(\text{betrete Zustand}\, i)$

Aus der Grafik der Markov-Kette oben können wir in **(2)** einsetzen:

(3)
$$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu_i) p_i &= \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i+1} \qquad \forall 0 < i \\ \lambda_0 p_0 &= \mu_1 p_1 \end{aligned}$$

Praktisch entsteht also ein lineares Gleichungssystem aus unendlich vielen Gleichungen. Wir wollen es sukzessive nach p_0 auflösen:

(4)
$$\begin{aligned} \mu_0 p_0 &= \mu_1 p_1 \\ p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \mu_1) p_1 &= \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 \\ (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 &= \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 \\ (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 - \lambda_0 p_0 &= \mu_2 p_2 \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} \left(\lambda_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \mu_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} - \lambda_0 \right) p_0 &= \mu_2 p_2 \\ \lambda_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 &= \mu_2 p_2 \\ \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_0 &= p_2 \end{aligned}$$

(6)
$$p_3 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_0$$

(7)
$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdots \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_0 \\ &= \underline{\underline{p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}}} \qquad \forall 0 < k \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir es ja mit Wahrscheinlichkeiten zu tun. Und wir wissen, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen disjunkten Ereignisse immer gleich 1 sein muss. Die Zustände unserer Markov-Kette sind zwangsläufig disjunkt.

(8) $$\sum_{i=0}^{\infty} p_i \triangleq 1$$

Daraus und aus den Formeln **(4)** bis **(7)** folgt also:

(9)
$$\begin{aligned}
1 &= p_0 + p_1 + p_2 + \ldots \\
&= p_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2} p_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_2}{\mu_3} p_0 + \ldots \\
&= p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \\
&= p_0 + p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \\
&= p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \right)
\end{aligned}$$

Jetzt können wir nach p_0 auflösen, und erhalten:

(10)
$$1 = p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \right)$$
$$p_0 = \underline{\underline{\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}}}}$$

Wenn λ und μ konstant bleiben, können wir setzen:

(11) $$\frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad \text{unter Bedingung}: \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda, \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu$$

Man kann sehr leicht erkennen, dass die Ausdrücke für **(9)** und **(10)** nur dann konvergieren, wenn gilt:

(12) $\lambda < \mu$

(13) $0 \leq \rho < 1$

Andernfalls ist das System überlastet – es kommen schneller Aufträge an, als abgearbeitet werden können.

Im Folgenden wollen wir also stets voraussetzen $\lambda < \mu$ und $0 \leq \rho < 1$.

Mit der Definition **(11)** können wir jetzt für die Gleichungen **(7)** und **(10)** schreiben:

(14) $$p_k = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \rho = p_0 \rho^k$$

(15) $$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \rho} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i}$$

Weiterhin gilt allgemein (geometrische Reihe):

(16) $$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad \forall 0 < x < 1$$

Um das Ganze für unsere Formel passend zu machen:

(17) $$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} x^i &= x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \\ \sum_{i=1}^{\infty} x^i &= \frac{1}{1-x} - 1 \end{aligned}$$

Damit können wir endlich auch Formel **(15)** auflösen:

(18) $$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1-\rho} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} = \underline{\underline{1-\rho}}$$

Nun lässt sich auch Gleichung **(14)** verschönern:

(19) $$p_k = p_0 \rho^k = \underline{\underline{(1-\rho)\rho^k}}$$

$\rho = (1 - p_0)$ ist somit auch die Wahrscheinlichkeit, dass das System beschäftigt ist, der Auslastungsfaktor.

Um weiterzukommen betrachten wir die geometrische Verteilung, einen Sonderfall der Binominalverteilung. Für sie gilt:

(20) $$f(x) = q(1-q)^{x-1}$$

(21) $$EX = \frac{1}{q}$$

Das sieht unserer Formel sehr ähnlich. Wir setzen

(22) $$q = 1 - \rho$$

und erhalten:

(23) $$f(x) = (1-\rho)\rho^{x-1}$$

(24) $$EX = \frac{1}{1-\rho}$$

Was stört ist das $x-1$, denn wir haben ja $p_k = (1-\rho)\rho^k$. Für unseren Erwartungswert gilt also

(25) $$f(n) = \rho f(x) = \rho(1-\rho)\rho^{x-1} = (1-\rho)\rho^x$$

und somit:

(26) $$EN = E\rho X = \rho EX = \underline{\underline{\frac{\rho}{1-\rho}}}$$

Die erwartete Anzahl Prozesse im System ist also $\frac{\rho}{1-\rho}$.

Befinden sich in einem *Einprozessorsystem* n Prozesse, so stehen $n-1$ davon logischerweise in der Warteschlange und genau einer wird vom Prozessor verarbeitet. Wenn kein oder genau ein Prozess im System ist, ist die Länge der Warteschlange 0.
Der Erwartungswert für die Länge der Warteschlange bei einem *Einprozessorsystem* ist somit:

(27) $$EQ = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_k$$

Wir setzen die Formel **(17)** ein:

(28) $$EQ = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)(1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\rho^k$$

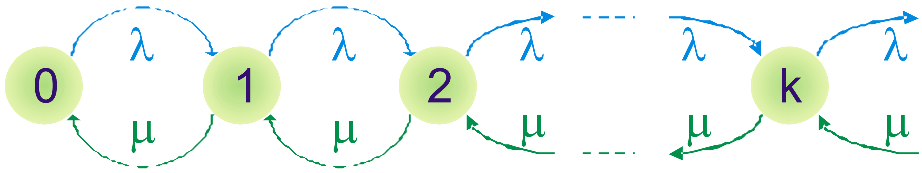
Generell gilt immer:

(29) $$\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)a^i = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2}$$

Das setzen wir in Formel **(28)** ein:

(30) $$EQ = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\rho^k = (1-\rho)\frac{1}{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)^2} = \frac{1-\rho}{\left(\frac{1}{\rho}-1\right)^2} = \frac{1-\rho}{\left(\frac{1-\rho}{\rho}\right)^2} = \frac{1-\rho}{\frac{(1-\rho)^2}{\rho^2}} = \underline{\underline{\frac{\rho^2}{1-\rho}}}$$

B. Warum ist das ein gutes Modell?



Warum können wir aber den Markov-Prozess als Modell nutzen?

Nehmen wir ein M/M/x-System an. Dann sind sowohl die Zwischenankunftsabstände A als auch die Rechenzeitanforderungen B exponentialverteilt, mit:

(31) $A \sim \exp(\lambda) \Rightarrow P(A \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

(32) $B \sim \exp(\mu) \Rightarrow P(B \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$

Somit sind die Wahrscheinlichkeiten, dass in einem unendlich kleinen Zeitabschnitt genau ein Prozess ankommt bzw. ein Prozess fertig wird, genau λ bzw. μ. Es gilt weiterhin:

(33) $EA = \frac{1}{\lambda}$

(34) $EB = \frac{1}{\mu}$

Nach Formel **(11)** folgt:

(35) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{EA}}{\frac{1}{EB}} = \underline{\underline{\frac{EB}{EA}}}$

C. Gesetz von Little

Wir definieren:

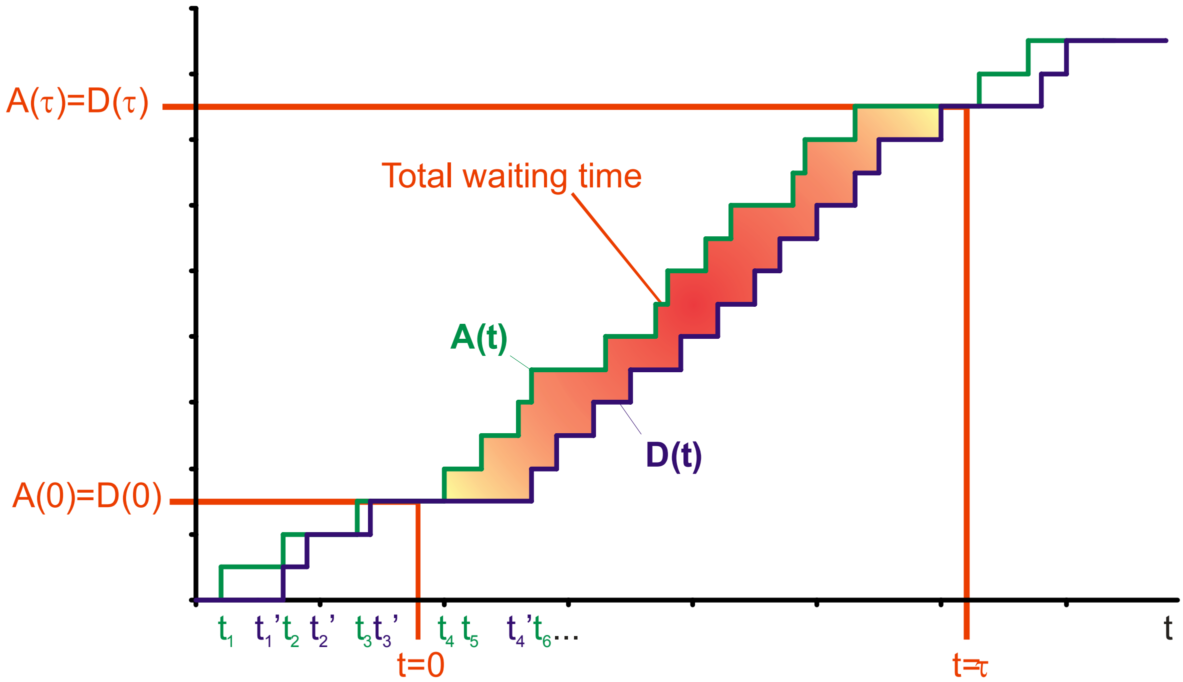
(36) Antwortzeit T = Wartezeit W + Rechenzeit S

(37) $Q(t)$ als Anzahl der Prozesse in der Warteschlange zur Zeit t

(38) $N(t)$ als Gesamtanzahl der Prozesse im System zur Zeit t

Bei m Prozessoren gilt demnach:

(39) $Q(t) = \max\{0, N(t) - m\}$



Wir definieren die Ankunftszeiten unseres Systems der Reihenfolge der Ankünfte nach als

(40) $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$

Weiterhin sei der Zählprozess $A(t)$ definiert als:

(41) $A(t) = \text{Anzahl der } t_j \leq t$

Wir setzen FIFO voraus, dann ist die Reihenfolge, in der Prozesse den Warteraum verlassen, um vom Server bearbeitet zu werden, gleich der Reihenfolge, in der Sie ihn betreten haben. Dann definieren wir die Austrittszeiten aus dem Warteraum als:

(42) $0 < t_1' < t_2' < \ldots$

Es gilt stets:

(43) $t_j \le t_j'$

Da kein Prozess den Warteraum verlassen kann, bevor er ihn betreten hat.

Weiterhin definieren wir den Zählprozess

(44) $D(t) = \text{Anzahl der } t_j' \le t$

Das ist also die Anzahl der Prozesse, die den Warteraum bis zum Zeitpunkt t verlassen haben (und die somit zur Abarbeitung gelangt sind).

Zu jedem Zeitpunkt t entspricht die Anzahl der Prozesse, die seit Zeit 0 angekommen sind, aber den Warteraum noch nicht verlassen haben:

(45) $Q(t) = A(t) - D(t)$

$Q(t)$ ist also die Länge der Warteschlange zum Zeitpunkt t.

Im Falle von FIFO ist die Zeit $t_j' - t_j$, die der j-te Prozess in der Warteschlange verbringt gleich der horizontalen Distanz (oder der Fläche des horizontalen Streifens) zwischen den Kurven $A(t)$ und $D(t)$ auf der Ebene zwischen $j-1$ und j.

Für die weitere Betrachtung wählen wir zwei Referenzzeitpunkte $t = 0$ und $t = \tau$ für die gilt $A(0) = D(0)$ bzw. $A(\tau) = D(\tau)$, bei denen die CPU als untätig ist.

Wir führen ein:

(46) $n(\tau) = A(\tau) - A(0)$, also die Gesamtzahl von Ankünften in der Zeit $(0, \tau)$.

(47) $\lambda(\tau) = \dfrac{n(\tau)}{\tau}$, also die mittlere Ankunftsrate im Zeitraum $(0, \tau)$.

Somit kann die gesamte farbig dargestellte Fläche in $n(\tau)$ horizontale Streifen zerlegt werden, die alle gleichhoch sind. Deren durchschnittliche Länge ist dann:

(48) $\overline{W}(\tau) = \dfrac{1}{n(\tau)} \sum_{j=1}^{n(\tau)} W_j$, also die mittlere Wartezeit pro Prozess in $(0, \tau)$.

Die mittlere Länge der Warteschlange ist nach Definition **(37)**:

(49) $\overline{Q}(\tau) = \dfrac{1}{\tau} \int_{t=0}^{\tau} Q(t)\,dt$

Weil alle Streifen gleichhoch sind, nämlich genau eine Einheit (einen Prozess), kann man die Fläche der horizontalen Streifen gleich der Summe ihrer Längen setzen, so dass sich ergibt:

$$\textbf{(50)}\quad \sum_{j=1}^{n(\tau)} W_j = \int_{t=0}^{\tau} Q(t)\,dt$$

Aus **(49)** und **(50)** ergibt sich:

$$\textbf{(51)}\quad \overline{Q}(\tau) = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n(\tau)} W_j$$

Da substituieren wir jetzt die Formel **(48)** rein:

$$\textbf{(52)}\quad \overline{Q}(\tau) = \frac{1}{\tau}\left[n(\tau)\frac{1}{n(\tau)}\sum_{j=1}^{n(\tau)} W_j\right] = \frac{1}{\tau}n(\tau)\overline{W}(\tau) = \frac{n(\tau)}{\tau}\overline{W}(\tau)$$

Zu guter Letzt substituieren wir noch Formel **(47)** mit rein

$$\textbf{(53)}\quad \overline{Q}(\tau) = \frac{n(\tau)}{\tau}\overline{W}(\tau) = \lambda(\tau)\overline{W}(\tau)$$

Wenn wir jetzt τ gegen unendlich gehen lassen, und annehmen, dass alles schön konvergiert, so erhalten wir:

$$\textbf{(54)}\quad \underline{\underline{EQ = \lambda EW}}$$

Um auch das andere Gesetz von Little zu erhalten, können wir dasselbe Prinzip wieder anwenden. Sei t_j'' die Zeit, bei der der Prozess j das System verlässt. Dann definieren den Zählprozess:

$$\textbf{(55)}\quad D'(t) = \text{Anzahl der } t_j'' \le t$$

$D'(t)$ ist also die Anzahl der Prozesse, die bis zum Zeitpunkt t das System verlassen haben (also vom Prozessor abgearbeitet wurden).

Die Anzahl der Kunden im System zum Zeitpunkt t wird dann definiert durch die Größe:

$$\textbf{(56)}\quad N(t) = A(t) - D'(t)$$

Die Gesamtfläche zwischen den Kurven von $A(t)$ und $D'(t)$ entspricht der totalen Antwortzeit der (verarbeiteten) Prozesse in dieser Zeit, und ist:

$$\textbf{(57)}\quad \int_{t=0}^{\tau} N(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n(t)} T_j$$

Wir gehen gleich vor, und erhalten:

$$\textbf{(58)}\quad \underline{\underline{EN = \lambda ET}}$$

D. M/M/1-Systeme

Wir wissen bereits aus den Formeln **(26)** und **(30)**:

(59) $EN = \frac{\rho}{1-\rho}$

(60) $EQ = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

Die Gesetze von Little besagen:

(54) $EQ = \lambda EW$

(58) $EN = \lambda ET$

So dass wir bestimmen können:

(61) $EQ = \lambda EW = \frac{\rho^2}{1-\rho} \Rightarrow EW = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho}$

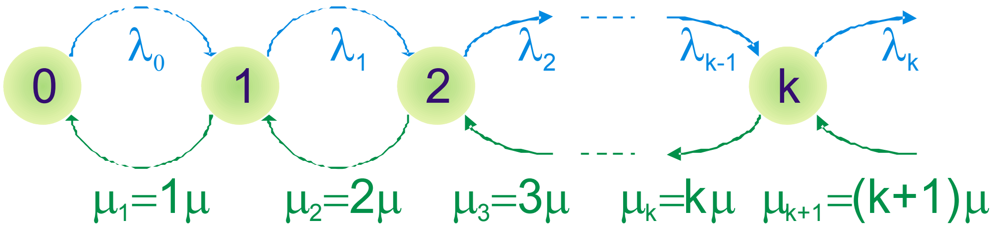
(62) $EN = \lambda ET = \frac{\rho}{1-\rho} \Rightarrow ET = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho}{\lambda}\frac{1}{1-\rho}$

Nun nutzen wir die Formel **(11)**, mit der ρ definiert wurde, und erhalten:

(63) $EW = \frac{\rho}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} = \underline{\underline{\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}}}$

(64) $ET = \frac{\rho}{\lambda}\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\rho} = \underline{\underline{\frac{1}{\mu(1-\rho)}}}$

E. M/M/∞-Systeme



Bei einem M/M/∞-System wird jeder eintreffende Prozess sofort verarbeitet. Er kommt in keine Warteschlange, sondern kann sofort einem der (theoretisch) unendlich vielen Prozessoren zugewiesen werden.

Wie in der Grafik dargestellt treffen die Prozesse weiter gemäß dem Poisson-Prozess ein $(\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda)$. Ihnen wird sofort ein Prozessor zugewiesen, so dass im Zustand n stets genau n Prozesse abgearbeitet werden.
Die Rechenzeitanforderung bleibt exponentialverteilt, was allerdings jetzt dazu führt, dass im Zustand n auch immer n Prozesse fertig werden können.

Hier gilt also:

(65) $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda$

(66) $\mu_n = n\mu$

(67) $\underline{\underline{EQ = 0}}$

Wir nehmen uns also die Lösung von Formel **(7)** her und setzen ein:

(68) $$p_k = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda}{j\mu} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\frac{\lambda}{\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} j} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}$$

Wieder greifen wir auf die Erkenntnis aus Formel **(8)** zurück:

(8) $$\sum_{i=0}^{\infty} p_i \triangleq 1$$

(69) $$1 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} = p_0 + p_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} = p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}\right)$$

$$1 = p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}$$

Zum Glück kommt uns hier die Mathematik zu Hilfe – in Form der Definition der Exponentialfunktion:

(70) $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

und somit können wir mit den Formeln **(70)** und **(68)** sagen:

(71) $1 = p_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!} = p_0 e^{\frac{\lambda}{\mu}}$

(72) $p_0 = \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$

Dieses Ergebnis setzen wir in **(68)** ein:

(73) $p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$

So dass wir jetzt allgemein sagen können:

(74) $\underline{\underline{p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots.$

Wir schauen uns die Formel an, und uns fällt auf, dass sie der Formel für den Poisson-Prozess **(75)** sehr ähnlich sieht:

(75) $P(X_t = k) = \frac{\xi^k}{k!} e^{-\xi}$

(76) $EX_t = \xi$

Das heißt, um unsere allgemeine Gleichung **(74)** in eine Zufallsgröße gemäß dem Poisson-Prozess umzuwandeln, brauchen wir nur zu setzen:

(77) $\xi = \frac{\lambda}{\mu}$

(78) $p_n = \frac{\xi^n}{n!} e^{-\xi}$

Damit können wir den Erwartungswert für die Anzahl der beschäftigten Prozessoren und somit die für Anzahl Prozesse im System aus der Gleichung **(76)** ableiten:

(79) $\underline{\underline{EN = \frac{\lambda}{\mu}}}$

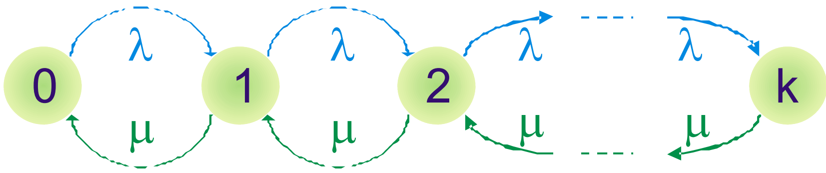
Mit Hilfe der Littleschen Gesetze **(54)** und **(58)** sowie den Formeln **(67)** und **(79)** berechnen wir den Rest:

(54) $EQ = \lambda EW$ **(58)** $EN = \lambda ET$

(80) $EW = \frac{EQ}{\lambda} = \frac{0}{\lambda} = \underline{\underline{0}}$

(81) $ET = \frac{EN}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{\lambda} = \underline{\underline{\frac{1}{\mu}}}$

F. M/M/1/K-Systeme



Als nächstes wollen wir ein M/M/1 System betrachten, bei dem die maximale Anzahl der Prozesse im System auf K beschränkt ist.

Wieder ist die Formel **(7)** für uns nutzbar:

(7) $$p_i = p_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$$

Allerdings müssen wir Formel **(3)** diesmal erweitern:

(3) $$\begin{aligned} (\lambda_i + \mu_i) p_i &= \lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu_{i+1} p_{i+1} \qquad \forall 0 < i < K \\ \lambda_0 p_0 &= \mu_1 p_1 \end{aligned}$$

(82) $$\mu_K p_K = \lambda_{K-1} p_{K-1}$$

Wir nehmen uns wieder Gleichung **(7)** zur Hand, und setzen diesen mal gleich λ und μ konstant:

(7) $$p_i = p_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}$$

(83) $$p_i = p_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = p_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \qquad \forall 0 < 1 < K$$

Löst man **(82)** mit Gleichung **(83)** auf, so erkennt man, dass das Ergebnis wieder perfekt dieser Gleichung entspricht:

(84) $$p_K = \frac{\lambda_{K-1}}{\mu_K} p_{K-1} = \frac{\lambda}{\mu} p_{K-1} = p_0 \frac{\lambda}{\mu} \prod_{j=1}^{K-1} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \prod_{j=1}^{K} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K$$

Jetzt müssen wir allerdings Gleichung **(8)** modifizieren. In unsrem System können nicht mehr unendlich viele Prozesse sein. Es sind nur noch höchstens k Prozesse da.

(85) $$\sum_{i=0}^{K} p_i \triangleq 1$$

Daraus folgt dann:

$$\textbf{(86)}\quad 1 = p_0 + \sum_{i=1}^{K+1} p_i = p_0 + \sum_{i=1}^{K} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = p_0 + p_0 \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right) = p_0 \sum_{i=0}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$$

In der Gleichung kommt wieder eine geometrische Reihe ähnlich wie bei Formel **(17)** vor, für die gilt:

$$\textbf{(87)}\quad \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad \forall 0 < a < 1$$

Wir bauen Formel **(87)** in **(86)** ein:

$$\textbf{(88)}\quad 1 = p_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right) = p_0 \sum_{i=0}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = p_0 \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Das lösen wir nach p_0 auf und erhalten:

$$\textbf{(89)}\quad 1 = p_0 \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \Rightarrow p_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$$

Jetzt können wir Formel **(83)** auflösen:

$$\textbf{(90)}\quad p_i = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \underline{\underline{\frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}} \qquad \forall 0 \le i \le K$$